$$= \frac{5U_n + 3 - U_n^2 - 3U_n}{U_n + 3}$$

$$= \frac{-U_n^2 + 2U_n + 3}{U_n + 3}$$

Soit le trinôme : $-X^2 + 2X + 3$

On a $a - b + c = 0$ donc

$-X^2 + 2X + 3 = 0 \Leftrightarrow X' = -1, X'' = 3$

Par suite : $-X^2 + 2X + 3 = -(X+1)(X-3)$

D'où : $U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n+1)(U_n-3)}{U_n+3}$

Or on sait que : $U_n + 1 \geq 0, U_n - 3 < 0$

et $U_n + 3 \geq 0$ D'où : $U_{n+1} - U_n > 0$

Donc (U_n) est strictement croissante

Conclusion :

(U_n) est croissante et majorée par 3

d'où (U_n) est convergente.

2) $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$

a/ on a :

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 3}{U_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5U_n + 3}{U_n + 3} - 3}{\frac{5U_n + 3}{U_n + 3} + 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{5U_n + 3 - 3U_n - 9}{U_n + 3}}{\frac{5U_n + 3 + U_n + 3}{U_n + 3}}$$

$$V_{n+1} = \frac{2U_n - 6}{6U_n + 6} = \frac{2(U_n - 3)}{6(U_n + 1)}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{U_n - 3}{U_n + 1} = \frac{1}{3} V_n$$

Donc $\forall n \in \square : V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n$.

et par suite (V_n) est une suite géométrique

de raison $q = \frac{1}{3}$.

b/ on a : $V_n = V_0 \times q^n$

Or $V_0 = \frac{U_0 - 3}{U_0 + 1} = \frac{1-3}{1+1} = -1$ donc : $\boxed{V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

On a : $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$

$\Leftrightarrow V_n(U_n + 1) = U_n - 3$

$\Leftrightarrow V_n U_n - U_n = -V_n - 3$

$\Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = -V_n - 3$

$\Leftrightarrow U_n = \frac{-V_n - 3}{V_n - 1} = \frac{V_n + 3}{1 - V_n}$

Donc $\forall n \in \square$:

$$\boxed{U_n = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}}$$

c/ (V_n) est une suite géométrique

de raison $q = \frac{1}{3} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 3$$

3) $W_n = U_n - 3$

On a : $W_{n+1} = U_{n+1} - 3$

$$= \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} - 3 = \frac{5U_n + 3 - 3U_n - 9}{U_n + 3}$$

$$= \frac{2U_n - 6}{U_n + 3} = \frac{2(U_n - 3)}{U_n + 3}$$

Donc $|W_{n+1}| = \left|\frac{2(U_n - 3)}{U_n + 3}\right|$

$$= \frac{2}{|U_n + 3|} |U_n - 3|$$

$$= \frac{2}{U_n + 3} |U_n - 3|, U_n + 3 \geq 0$$

$$= \frac{2}{U_n + 3} |W_n|$$

Or $U_n \geq 0 \Leftrightarrow U_n + 3 \geq 3$